CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE - ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

**SESSION 1991**

**COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

*Durée : 4 heures*

*NOTA : Les deux problèmes sont indépendants.*

## PROBLEME I

Dans tout le problème, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, fermé mais non nécessairement borné; p désigne une fonction de I vers $\mathbb{R}$, continue et strictement positive sur I, telle que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_I |x^n| \, p(x)\,dx$ soit convergente.

A. 1°) Vérifier que les fonctions $p_1$, $p_2$ et $p_3$ telles que :

$$p_1 : x \longmapsto (1-x^2)^{1/2} \; ; \; p_2 : x \longmapsto e^{-x} \; ; \; p_3 : x \longmapsto e^{\frac{-x^2}{2}}$$

sont des fonctions p sur, respectivement : $[-1, +1]$ ; $[0, +\infty[$ ; $]-\infty, +\infty[$

2°) Soit $E_p$ l'ensemble des fonctions f de I vers $\mathbb{R}$, continues sur l'intervalle I, telles que l'intégrale $\int_I f^2(x)\,p(x)\,dx$ soit convergente.

Vérifier que $E_p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ contenant les fonctions polynômes.

3°) Montrer que, pour tout $(f,g) \in E_p^2$, l'intégrale

$(f\,|\,g) = \int_I f(x)g(x)p(x)dx$ est convergente.

On note $\varphi$ l'application de $E_p^2$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $\varphi(f,g) = (f\,|\,g)$.

Démontrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E_p$, donc que $(E_p, \varphi)$ est un espace préhilbertien réel dont la norme associée est telle que :

$$\|f\| = \left[\int_I f^2(x)\,p(x)\,dx\right]^{1/2}$$

4°) On note $(e_n, n \in \mathbb{N})$ la base canonique de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de I vers $\mathbb{R}$, soit :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, e_n(x) = x^n$.

On applique à cette base le procédé d'orthogonalisation de Schmidt et on obtient une famille orthogonale $(P_n, n \in \mathbb{N})$ de fonctions polynômes dans $E_p$, le coefficient de la plus haute puissance de x, dans $P_n(x)$ étant égal à 1.

Vérifier que, pour $n \geqslant 1$, $(e_1 P_{n-1} \,|\, P_n) = (P_n \,|\, P_n)$.

**A SUIVRE**

5°) Pour $n \geq 2$ et $x \in I$, montrer qu'il existe deux suites de réels, $(\lambda_n)$ et $(\mu_n)$, telles que :

$P_n(x) - xP_{n-1}(x) = \lambda_n P_{n-1}(x) + \mu_n P_{n-2}(x)$ .

On peut remarquer qu'il existe une suite de réels $(a_k)$ telle que

$P_n = e_1 P_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k$ .

6°) Calculer $P_0$, $P_1$, $P_2$ pour les trois fonctions $p_1$, $p_2$ et $p_3$ définies au A 1)°. (On a $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ )

**B.** On se place désormais dans l'espace préhilbertien $E_p$ obtenu pour $p = p_2$ et $I = [0, +\infty[$.

1°) On note, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ .

Vérifier que $L_n$ est une fonction polynôme de degré n et que la famille $(L_n, n \in \mathbb{N})$ est orthonormale.
Calculer $L_n(0)$.
On pourra calculer, par des intégrations par parties, les intégrales :

$\int_0^{+\infty} x^k L_n(x) e^{-x} dx$ , pour $k < n$, numériquement,

et $\int_0^{+\infty} x^n L_n(x) e^{-x} dx$ , en fonction de n.

2°) En admettant que les fonctions polynômes $L_n$ sont proportionnelles aux fonctions polynômes $P_n$ définies dans le A 4°) trouver la relation entre $L_n(x)$, $P_n(x)$ et $P_n(0)$ , pour $x \in I$.
Déterminer en fonction de n, le coefficient du monôme en $x^n$ dans $L_n(x)$ et en déduire $P_n(0)$ en fonction de n.

3°)

a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , on considère la fonction $g_\lambda$ telle que : $\forall x \in I$, $g_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$ .
Vérifier que $g_\lambda$ est un élément de $E_p$ .

b) Pour tout entier naturel n , calculer $c(n,\lambda) = (g_\lambda | L_n)$ en fonction de n et de $\lambda$.

c) Calculer, en fonction de $\lambda$ , $\sum_{n=0}^{+\infty} |c(n,\lambda)|^2$.

d) Comparer $||g_\lambda||^2$ à $\sum_{n=0}^{+\infty} [c(n,\lambda)]^2$ , la norme $||\cdot||$ ayant été définie au A 3°), avec ici $p = p_2$ .

## PROBLEME 2

E désigne un espace euclidien de dimension n sur $\mathbb{R}$, $n \geq 1$, et L(E) désigne l'ensemble des endomorphismes de E. Le produit scalaire de deux éléments x et y de E est noté $x \cdot y$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

**A.** A la suite $(x_k, 1 \leq k \leq n)$ d'éléments de E, on associe la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{ij} = x_i \cdot x_j$ et son déterminant noté $G(x_1, ..., x_n)$ ; soit $e = (e_i, 1 \leq i \leq n)$ une base orthonormale de E.

**1°)** A la suite $(x_k, 1 \leq k \leq n)$ d'éléments de E on associe l'endomorphisme u de L(E) défini par :

$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, u(e_i) = x_i$.

Soit $\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in E^2, \Phi(x,y) = u(x) \cdot u(y)$.

**a)** Montrer que $\Phi$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur E et exprimer sa matrice, relativement à la base e, en fonction de la matrice U de u, relativement à la même base.

**b)** Trouver une relation entre $G(x_1, ..., x_n)$ et det(U), où det(U) désigne le déterminant de la matrice U.

Si s désigne une permutation d'ordre n, comparer : $G(x_{s(1)}, ..., x_{s(n)})$ et $G(x_1, ..., x_n)$.

**c)** A quelle condition sur $G(x_1, ..., x_n)$ les éléments $x_1, ..., x_n$ de E sont-ils linéairement indépendants?

**2°)** Soit M une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$ et $(c_i, 1 \leq i \leq n)$ la suite de ses vecteurs colonnes.

**a)** Montrer qu'il existe une matrice orthogonale B et une matrice triangulaire T dont les éléments diagonaux sont positifs, telles que M=BT, cette décomposition étant unique.

**b)** Comparer det(M) au produit $\prod_{i=1}^{n} \|c_i\|$.

A quelle condition sur la famille $(c_i, 1 \leq i \leq n)$, a-t-on : $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} \|c_i\|$ ?

**c)** Comparer $G(x_1, ..., x_n)$ au produit $\prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$.

A quelle condition sur la famille $(x_i, 1 \leq i \leq n)$ peut-on écrire une égalité faisant intervenir $G(x_1, ..., x_n)$ et le produit $\prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$ ?

**B.** On considère le sous-ensemble S de L(E) défini par :

$S = \{s : s \in L(E) ; \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in E^2, s(x) \cdot s(y) = \lambda x \cdot y\}$

**1°)** **a)** Montrer qu'un élément t de L(E) appartient à S si et seulement si cet élément vérifie :

$\exists \mu \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \|t(x)\| = \mu \|x\|$.

**b)** Montrer que tout élément s de S est un automorphisme de E et que S est un groupe pour la composition des applications.

**2°)** **a)** Montrer que tout élément s de S a une décomposition unique de la forme $s = \rho u$, u étant un automorphisme orthogonal de E et $\rho$ un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

**b)** Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice P de $M_n(\mathbb{R})$ soit la matrice d'un élément s de S.

———— 0 ————

**FIN**